熱的不安定流体の数値計算法について

Numerical method for thermally unstable hydrodynamics

◯ 小山洋 (神大), 西川裕章 (ミシガン大)

Hiroshi KOYAMA* and Hiroaki NISHIKAWA**

*Dept. of Earth and Planetary System Science, Graduate School of Science and Technology, Kobe University, Nada, Kobe 657-8501, Japan

**Dept. of Aerospace Eng., University of Michigan, Ann Arbor, MI, 48109, USA

In this paper, we study the Runge-Kutta Discontinous Galerkin (RKDG) Method for the Euler equations with thermal diffusion and stiff source term. We use the local discontinous Galerkin (LDG) approach to discretize the diffusion term. Numerical examples show good performance for resolving stiff relaxation problems. The RKDG method is a useful numerical method for thermally unstable radiative hydrodynamics.

1. 緒論

宇宙流体などの希薄なプラズマ流体は輻射とエネルギーのやりとりをすることでいくつかの温度の相に保たれることがある．この現象は輻射によるタイムスケール τ_r で特徴付けられて，音速を c_s とすれば，長さスケール $\ell_r \sim \tau_r c_s$ の現象である．今，異なる温度の相が接する場合を考えると，境界では熱伝導によるエネルギー輸送が生じる．この時の境界面を特徴付ける長さスケールは単位質量当たりの熱伝導係数 κ を用いて $\ell_K \sim \sqrt{\kappa\tau_r}$ と表す事が出来る．この境界面のスケールは流れのスケール ℓ_r に比べて約 1/100 と非常に小さい．このような輻射による Source 項と拡散項がある流体では Stiff な緩和を解かなければならず，高い分解能が要求される．

従来の非粘性流体計算法に Source 項と拡散項を Operator 分割法で加える限り，緩和するスケール ℓ_K を分解する為には最低でも 3 メッシュ必要であった [1]．これをより少ないメッシュで分解する為に Operator 分割しない空間離散化法を開発した．離散化の方法として Galerkin の方法を用いた．

2. 高精度数値計算法

1 次元問題を考える．基礎方程式は，

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x + \mathbf{g}(\mathbf{u}_x)_x = \mathbf{s}(\mathbf{u}), \tag{1}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho v \\ P + \rho v^2 \\ (E+P)v \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K(T)T_x \end{bmatrix}, \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s(\rho, T) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

である．左辺第 3 項は拡散項で，簡単のため粘性を無視した．右辺の Source 項，s は単位時間・単位体積当たりに加えられる輻射からの正味のエネルギー注入率であり，温度，密度の関数になっている．

2.1 DG-space discretization for hyperbolic system and source term

今，流体の方程式に試行関数 $\psi(x)$ を乗じてセル j 内で体積積分すると，

$$\int_{I_j} \mathbf{u}_t \psi dx - \int_{I_j} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \psi_x dx + (\mathbf{f}\psi)\Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = \int_{I_j} \mathbf{s}\psi dx, \tag{4}$$

となる．ここで $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ はセル j の積分区間である．今，試行関数に直交系であるルジャンドル多項式を用いて，流体の保存量 u を，

$$u(x,t) = \sum_{\ell=0}^{k} u_j^\ell(t)\phi_\ell^j(x), \quad \phi_\ell^j(x) = P_\ell(2(x-x_j)/\Delta_j), \tag{5}$$

と表せば，$u_j^\ell(t)$ の方程式として

$$\frac{d}{dt}u_j^\ell(t) + \frac{2\ell+1}{\Delta_j}\left[-\int_{I_j}\{s(u)\phi_\ell^j + f(u)(\phi_\ell^j)_x\}dx + \left(\hat{f}\phi_\ell^j\right)\Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}\right] = 0, \tag{6}$$

が得られる．ここに $\Delta_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ である．u^0, u^1, u^2 はそれぞれ u, u_x, u_{xx} のセル平均を表している．従って $k=1$ までとると 2 次精度スキーム (P^1), $k=2$ までとると 3 次精度スキーム (P^2) になる．

2.2 The Local DG approach for diffusion term

拡散方程式のような放物型の方程式に DG をそのまま適応するとメッシュを増大させても解が収束しないことが知られている．この問題は一階の微分方程式系に落して DG を適用する Local DG (LDG) method により克服することができる [2]．今 g の代わりに新しい変数 $q = \sqrt{K}T_x$ を導入すると，$g = -\sqrt{K}q$ であるので，

$$q - h_x = 0, \tag{7}$$

に対して DG を適用して q の方程式，

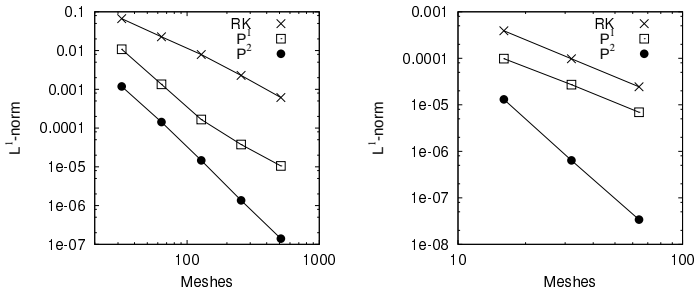
$$q_j^\ell + \frac{2\ell+1}{\Delta_j}\left[\int_{I_j} h(u)(\phi_\ell^j)_x dx - \left(\hat{h}\phi_\ell^j\right)\Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}\right] = 0, \tag{8}$$

を解けば良い．ここに $h = \int^T \sqrt{K}dT$ である．数値流速 $\hat{g} = \sqrt{K(\hat{u})}\hat{q}, \hat{h} = h(\hat{u})$ にはセル境界の相加平均値を用いた．

3. テスト問題

ここでは計算法の違いによる精度の差異を見るために 3 つの計算法 (a) Second-order Runge-Kutta Scheme using van Leer's slope limiter (以後 RK と称す), (b) P^1 RKDG (Second-order Scheme), (c) P^2 RKDG (Third-order Scheme), でテスト計算を行った．時間方向の積分には TVD-RK time discretization[3] を，数値流速 $\hat{f}$ には Roe's Approximate Riemann Solver を用いた．CFL number は全ての計算で 0.2 にした．

まず始めにオイラー方程式のみで移流のテスト計算を行った．Fig 1(a), Table 1 は初期条件 $\rho(x,t=0) = \sin^4(\pi x), v(x,t=0) = 1$ で時刻 $t=1$ の時の密度の誤差である．それぞれ期待される精



(a) Entropy wave　　(b) Thermal diffusion

Fig.1　Accuracy test for entropy wave and thermal diffusion

度を表すが，同じ 2 次精度でも P^1 の方が誤差が少ない事が見て取れる．

Table1　Acurracy test for entropy wave, $\rho(x,t) = \sin^4[\pi(x-t)]$

	RK(Second order)		P^1(Second order)		P^2(Third order)	
Δx	L^1-error	Order	L^1-error	Order	L^1-error	Order
1/32	6.65e-02	—	1.08e-02	—	1.19e-03	—
1/64	2.27e-02	1.55	1.35e-03	3.00	1.43e-04	3.06
1/128	7.91e-03	1.52	1.67e-04	3.01	1.46e-05	3.29
1/256	2.28e-03	1.79	3.76e-05	2.15	1.36e-06	3.42
1/512	6.14e-04	1.89	1.06e-05	1.83	1.40e-07	3.28

次に熱拡散のテスト計算の結果を示す (Fig 1(b), Table 2)．ここでは流体の方程式の代わりに線形の拡散方程式 $u_t = u_{xx}$ を解いた．初期条件は $u(x,t=0) = \sin(\pi x)$ で振幅が半分になる時刻 $t = \log 2$ の時の誤差を比較した．P^2 は理論的には 3 次精度の方法であるが，u だけで見たときにはそれ以上の精度が出ることがある．

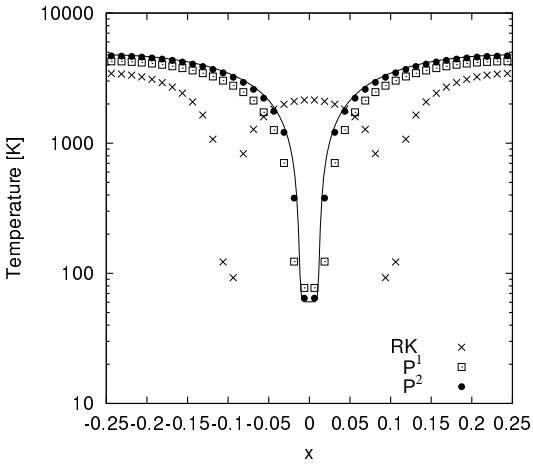
Table2　Acurracy test for thermal diffusion, $u(x,t) = \exp(-t)\sin(\pi x)$

	RK(Second order)		P^1(Second order)		P^2(Third order)	
Δx	L^1-error	Order	L^1-error	Order	L^1-error	Order
1/16	3.91e-04	—	1.46e-04	—	1.31e-05	—
1/32	9.76e-05	2.00	4.00e-05	1.87	6.39e-07	4.36
1/64	2.44e-05	2.00	1.02e-05	1.97	3.40e-08	4.23

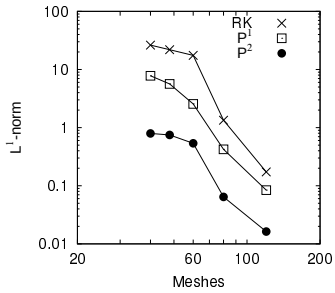
最後に全ての項を含んだ熱不安定性のテスト計算を示す．初期に線形不安定な 2 波長の揺らぎを与え，非線形成長した結果温度の低いガス雲が形成される．このガス雲の間は高温のガスが満たされているが，熱輸送によって次第に冷却していく．その結果，冷たい雲の間の高温ガスが消失することで二つのガスは合体し一つのガス雲となる．Fig 2(a) は温度の分布を表している．RK では 40 メッシュでは合体が見られず，80 メッシュまで分解して始めて合体が見られた．一方で P^1,P^2 ではもっとも粗い 40 メッシュでも合体を再現することができた．この 40 メッシュの空間精度は緩和過程のスケール ℓ_K と等しい．

4.　結語

我々は，Source 項と拡散項からなる Stiff な緩和を含む流体の方程式について Galerkin 法を用いた離散化による高精度スキーム



(a) Temperature profile: 40 points calulations are shown. The solid line denotes the finest solution obtaind by P^2 240 points calculation.



(b) Density L^1 error: P^2 240 points calculation is used as a reference solution.

Fig.2　Accuracy test for thermal condensation

を開発した．1 次元のテスト計算の結果，この計算法では緩和の空間スケール ℓ_K を 1 メッシュで分解することが出来た．これはセル内の物理量の勾配を解く事で緩和過程の構造を分解することが出来たと考えられる．これに対して従来の Operator 分割する計算法では同じ 2 次精度であっても 3 メッシュ必要だった．今，時間ステップは拡散項によって制限されるので $\Delta t \le \Delta x^2/\kappa$ で小さくしなければならない．従って，この新しい計算法で 3 次元計算をすれば $(1/3)^5 = 1/243$ 倍の演算量で済むことになる．

引 用 文 献

1) Koyama, H., & Inutsuka, S.: The Field Condition: A New Constraint on Spatial Resolution in Simulations of the Nonlinear Development of Thermal Instability, Astrophysical Journal, 602 (2004) L25-28.
2) Cockburn, B. & Shu, C.-W.: The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems, SIAM J. Numer. Anal. 35 (1998), 2440-2463.
3) Shu, C.-W.: Total-variation-diminishing time discretizations, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 9 (1988) 1073.