青春の高校数学 1

方手雅塚 著

中表紙イラスト 「絶対値さん」 by 方手雅塚

青春の高校数学 1

by

方手雅塚

目次

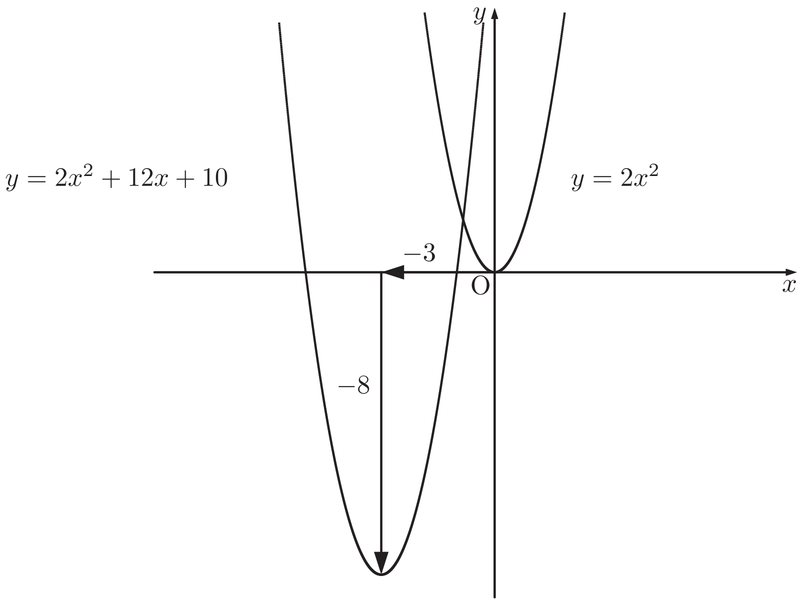
序文

高校数学は青春である。それはおそらく間違いのない事実である。そんなことは初耳だという人は、ぜひ本書を読んで頂きたい。本書は、形としては高校数学の参考書であるが、その焦点は常に青春という一点に置かれている。本書を読み進めるうち、あまりの感動に涙が止め処なく溢れ出てくることであろう。

数学は面白いだとか、数学は楽しいだとか、数学は美しいだとか。そんな主観的なことを言ったところで、しょせん響かない者には響かないし、また、響かせる必要もない。しかし、数学が青春であることは誰もが認識すべき非常に重要な事実である。特に現役の高校生諸君の場合は、今この時期に理解しておかないと取り返しのつかないことになる。なぜなら、青春は二度とは戻らないものだからである。本書を通じて、一人でも多くの高校生がその青春を力の限り謳歌することを願う。

方手雅塚
Ann Arbor, May 2007

となるので、これは $y=2x^2$ のグラフを x 方向に -3、y 方向に -8 だけ平行移動したものであることがわかる。ということで、下図のようにサラリとそのグラフをかくことが出来る。



これが $y=ax^2+bx+c$ のグラフのかき方である。何とも簡単な話である。とにかく、平方完成さえできればいいわけだ。だが、この平方完成を面倒だと思う人も居るかもしれない。そこで、“ほとんど脳みそを使わずに一気に平方完成する方法”を紹介しておこう。一般的に平方完成をすると、

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{(b/2)}{a}\right)^2-\frac{(b/2)^2}{a}+c$$

となる[*16]。これをよく見れば、 $b/2$ を計算し、それから $(b/2)/a$ と $(b/2)^2/a$ を計算すれば、スパッと平方完成できることがわかる。例えば、$2x^2+8x+11$ を平方完成するならば、とりあえず $(b/2)=8/2=4$ を計算して、$\frac{(b/2)}{a}$ は、$4\div 2=2$。そして、$\frac{(b/2)^2}{a}$ は、$4^2\div 2=16\div 2=8$。これらを上の式に当てはめて

$$2x^2+8x+11=2(x+2)^2+11-8$$

となる。つまり、$2(x+2)^2+3$ と平方完成できる。

お分かり頂けたであろうか。平方完成ができれば、$y=ax^2+bx+c$ のグラフなど簡単にかけてしまうのである。これは平方完成をマスターした高校生だけの特権である。指をくわえて羨ましそうに眺めている中学生を尻目に、スラスラと平方完成して2次関数のグラフをガンガンかこう。細かいことは後で考えればいい。今はとにかく平方完成だ。とにかく夢中になってグラフをかくことだ。誰もがそうやって真の高校生となっていくのである。

2.4　2次関数の決定

子供が泣いている。通りかかった君は、「ぼうや、どうしたんだい？」と優しく声をかける。すると子供はヒクヒクしながらこう言う。「お、おこづかいを減らされちゃったのー。毎月500円だったのに、先月200円に減らされて、今月はとうとう100円になっちゃったー。わぁ〜ん、わぁ〜ん！」かわいそうだけれども、この子の親に小遣いを上げるようお願いするわけにもいかず、ましてやこの子にお金を恵んであげるわけにもいかず、君は途方にくれる[*17]。そこへ、彫りの深い男子高校生が通りがかる。その彫りの深い男子高校生は、事情を聞くとさっそく紙と鉛筆を取り出し、何やら計算を始めた。その結果を子供に見せて説明すると、なんと子供は泣きやみ、満面の笑顔でスキップして家に帰っていった。君は感動のあまりボロボロと涙を流している。一体何が起こったのだろうか。

[*16] これから、この放物線の軸の方程式は $x=-\frac{b}{2a}$、頂点の座標は $(-\frac{b}{2a}, c-\frac{(b/2)^2}{a})$ 又は $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ となることが分かる。
[*17] 恵んでやれよ。

さて、話は変わるが、2点を決めると直線が一つ決まる。当たり前である。これは、直線の方程式 $y = ax + b$ が二つの未知数（a と b）を含んでいるからである。そして、“2点の座標”などのような二つの情報があれば、それで連立方程式を立ててそれを解いて未知数を決定、即ち、直線を決定できるというわけである[*18]。同様に考えると、放物線の式 $y = ax^2 + bx + c$ は、三つの未知数（a と b と c）を含んでいるので、**放物線は三つの情報があれば決定する**といえる。それは、$y = a(x-p)^2 + q$ の形で考えても、やはり未知数は a と p と q の三つで、同じことである。いくつかの例を見ていこう。

例題1：点 $(-3, 2)$ を頂点として、さらに点 $(-4, 5)$ を通る放物線の方程式（2次関数）を求めよ。

$y = a(x-p)^2 + q$ の形で考えると、

$$\text{頂点の座標が } (-3, 2) \quad \longrightarrow \quad p = -3, q = 2$$

よって、

$$y = a(x+3)^2 + 2$$

これに $(-4, 5)$ を代入すれば、以下のように a が決定される。

$$5 = a(-4+3)^2 + 2 \quad \longrightarrow \quad 5 = a + 2 \quad \longrightarrow \quad a = 3$$

結局、この放物線の式は $y = 3(x+3)^2 + 2 = 3x^2 + 18x + 29$ となる。

例題2：軸の方程式が $x = 2$ で、2点 $(1, 3)$、$(5, -5)$ を通る2次関数を決定せよ。

軸の方程式が与えられているので、$y = a(x-p)^2 + q$ の形で考えたほうが簡単である。

$$\text{軸の方程式が } x = 2 \quad \longrightarrow \quad p = 2$$

つまり

$$y = a(x-2)^2 + q$$

ここで、2点の座標を代入して、

$$\begin{aligned} 3 &= a(1-2)^2 + q \\ -5 &= a(5-2)^2 + q \end{aligned}$$

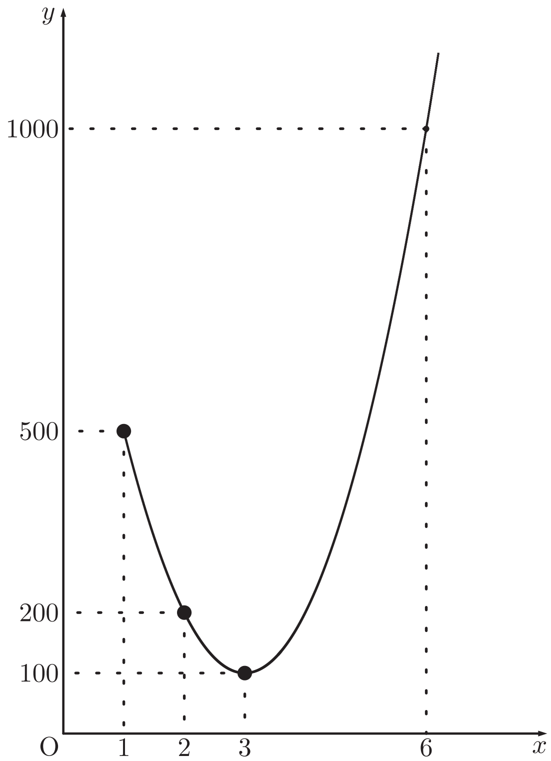
という a と q に関する連立方程式が得られる。これを解いて、$a = -1$ と $q = 4$ を得る。ゆえに、求める2次関数は $y = -(x-2)^2 + 4 = -x^2 + 4x$ となる。

さて、ここで冒頭の話に戻ろう。その彫りの深い男子高校生は何をしたのか。彼は2次関数を決定したのである。小遣いが一月目に 500 円ということで $(1, 500)$、二月目に 200 円で $(2, 200)$、そして三月目に 100 円で $(3, 100)$。これらを座標上の点だと考えれば、3つの情報があるので、これら3点を通る2次関数を決定することができる。そして、そのグラフを見れば今後お小遣いがどのように変化していくかを予想できると考えたわけである。まず、$y = ax^2 + bx + c$ として、3点の座標を順次代入して、

$$\begin{aligned} 500 &= a + b + c \\ 200 &= 4a + 2b + c \\ 100 &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

[*18] 中学生の頃、諸君はこれを散々やっている。

という三つの式を得る[19]。これを解いて、$a = 100$、$b = -600$、$c = 1000$ を得る。よって、求める 2 次関数は $y = 100x^2 - 600x + 1000$、そしてそのグラフは下図のようになる。図中の黒丸は、通るべき 3 点を表している。



これで子供が元気になった理由が分かったであろう。そう、お小遣いは今後飛躍的に上がっていくと考えられるのである。なんと 6 ヶ月目には 1000 円である。しかも、その後もグングン増え続ける。子供は本当に喜んだ。君は感動で涙腺を破壊され、ボロボロと涙を流した。そして、彫りの深い男子高校生は白い歯をキラリとさせ、青春の街へと消えていった。三つの情報を集めて 2 次関数を作るだけでいい。たったそれだけのことでいい。それだけで、人間はボロボロと涙を流すことができる。ニコニコ顔でスキップできる。「さらばだ」と言い放って、クールにその場を去ることができる。さあ、今すぐ三つの情報を探そう。むやみやたらに 2 次関数を作ろう。そして、今日も新たな感動の物語を作ろう。それは、青春という名の時代に数学を学ぶ諸君の使命である。

2.5　2 次関数の最大・最小

最大・最小は自分の目で見て判断するのが青春である[20]。何も見ずに勝手な妄想だけで最大・最小を見つけようとすると、必ずやどこかで間違いを犯してしまう。偉大な数学者レオンハルト・オイラーも、「己の目で確かめぬものに青春無し」と自身の著書の中で言い切っている[21]。ここでは正しい青春のあり方を 2 次関数の最大・最小を通じて学んで頂く。

大事なのはこれ一つだけである。

2 次関数の最大・最小の問題は、グラフをかいて解く。

これさえ守れば、まず間違えることはない[22]。例えば、$y = 2(x-2)^2 + 3$ の最大値と最小値を求めよと言われたら、とにかくグラフをかく。

[19] このような三文字についての 1 次の連立方程式を連立 3 元 1 次方程式という。これは、まず一つの文字を消去して二文字の連立方程式にすることから始めればいい。今の場合、引き算で簡単に c を消せる。

[20] 意味不明な表現だが、細かいことは気にしなくてよろしい。

[21] 嘘だ。レオンハルト・オイラーが偉大なのは本当である。

[22] 頭の中で描くだけでもいい。

と求まる。a も（上の式の B と b を A と a に書き換えて）同様にして求めることができる。そうして、これまた三角形を解くことに成功するのである。

以上のことは、下のようにまとめることができる。

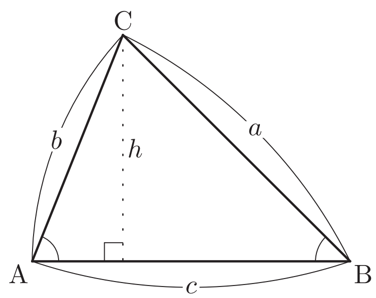
1.	**3 辺**	**→**	**余弦定理で解ける。**
2.	**2 辺とその間の角**	**→**	**余弦定理で解ける。**
3.	**1 辺とその両端の角**	**→**	**正弦定理で解ける。**

このように、最低限の情報（いずれか一つ）さえ与えられれば正弦定理又は余弦定理を用いて我々は三角形を簡単に解くことができるのである*39。一方、人間を解くことはかなり難しい。前に述べたように、確かに指紋や DNA などで人物を特定することは可能である。事実、それらは犯罪捜査等で大いに利用されている。しかし、人間の中身や過去まで解く（知り尽くす）ことを考えると、それは極めて困難である。どうやったら解けるだろうか？ 何か最低限の情報があるだろうか？ いや、そんなことを考えるよりも「ある人間の全てを知ることは、幸せをもたらすと言い切れるのだろうか？」「知らなければ良かったと、後で後悔することも有り得るのではないだろうか？」といったことを考える方が、もっと人間的でかつ青春的かもしれない。

3.10　三角形の面積

不良中学生にからまれてしまった。そんなときに「君達やめんか！ 三角形の面積は底辺×高さ÷ 2 なんだぞ！」などと言っても、「そんなことぐらい知ってるわい！ なめんなよボケ！」と言われておしまいである。あとは、ボコボコにされてお金を取られ、ズボンをちょっとだけずらされて原っぱに置き去りにされるだけである*40。しかし、三角形の面積のいろいろな求め方を知っていれば、胸を張って「お前ら！ 三角形の面積は、2 辺とその間の角から計算できるんだぞ！ さらに 1 辺とその両端の角からも計算できるんだ！ 他にもいろんな計算の仕方があるんだぞ！」と言うことができる。そして、そのあまりの凄さに不良中学生達は恐れおののき「すっ、すいませんでした、先輩！ 弟子にしてください！ お願いします！」と、彼らは君の前で土下座をすることになる。ここでは、そのようなときに備えて、不良中学生には想像もつかない三角形の面積の公式を学んで頂こう。

前項で、三角形の合同条件は三角形の決定条件でもあることを学んだ。つまり、3 辺、2 辺とその間の角、1 辺とその両端の角のいずれかを与えれば三角形がただ一つに決まる。ということは、当然のことながら面積も決まるはずである。まずは、2 辺とその間の角が与えられている場合を考えよう（下図）。



図の中で、2 辺の長さ b と c、そしてその間の $\angle$A が与えられているとしよう。底辺 AB から測った高さを h とすると、高さ h はサインを使って単純に、

$$h = b\sin \mathrm{A}$$

*39 一見地味な定理に思えるかもしれないが、正弦定理と余弦定理は大変重要な役割を果たしていることが実感できたであろう。

*40 ズボンをちょっとだけずらされた状態で放置されるのは耐え難い屈辱である。そんなことをされるなら、もっと殴られたほうがましである。

である。よって、面積＝底辺×高さ÷ 2 より、面積 S は、

$$S = c \times h \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}$$

となる。他の 2 辺とその間の角がわかっているときも、同様の公式が出る。かくして、**2 辺とその間の角が与えられている場合**の面積は

$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A} = \frac{1}{2}ca\sin\mathrm{B} = \frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}}}$$

で求められることがわかった。ここはとりあえず「おぉー！ すっげー！」と雄たけびを上げておこう。しかし、雄たけびを上げた後ですぐに「でも 3 種類もあったら覚えるのが大変じゃないか。なんか簡単な覚え方はないのかよー！」と叫んでみよう。そして気づこう。「あっ！ そうだ！ 2 辺とその間の角なんだから、2 辺とその間の角で考えればいいんだ！ A だとか B だとか関係ないんだ！」そう、記号ではなくイメージで捉えれば、上のどの式も

面積　＝　$\frac{1}{2}$　×　2辺の掛け算　×　その間の角のサイン

の形になっていることに気づくであろう。そして「まぶしいぜ。うっとりするぜ」などとつぶやきながら、不良中学生達にとっては高嶺の花である三角比を利用したこの美しい公式を楽しもう。

次に、1 辺とその両端の角が与えられている場合を考えよう。前と同じ図で、今度は 1 辺の長さ c とその両端の $\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ が与えられているとしよう。前と同じように、底辺 AB から測った高さを h とすれば $h = b\sin\mathrm{A}$、よって

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}$$

しかし、b が分からない場合を考えているので、なんとかして b を分かっているもの（c と $\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$）で表さなければならない。ここで思い出そう。「えぇ〜っと、この三角形は 1 辺とその両端の角が与えられているわけだから、余弦定理か正弦定理で完全に解くことができるはずだ。あっ！ 正弦定理だ！ いやっほーい！」と軽くジャンプしながら思いつくであろう。そう、$\angle\mathrm{C} = 180^\circ - (\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B})$ なので、正弦定理より

$$\frac{b}{\sin\mathrm{B}} = \frac{c}{\sin\{180^\circ - (\mathrm{A}+\mathrm{B})\}}$$

が成り立つ。ここで、関係式 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$ を使えば、

$$b = \frac{c\sin\mathrm{B}}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$$

となる。かくして、b を知っている値だけで表すことができた。最後に、これを $S = \frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}$ に代入して、**1 辺とその両端の角が与えられている場合**の面積の公式

$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{c^2}{2}\frac{\sin\mathrm{A}\ \sin\mathrm{B}}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}}}$$

を得るのである。もう一度言おう。これも c やら A やらの記号ではなくて、一辺とその両端の角度で計算されるという風に理解しよう。ちょっと眺めれば、これもなかなかの公式である。三角形の合同条件をかろうじて知っている不良中学生達は、この公式を見て、しかし何も理解できず、想像を絶する恐怖を体験することであろう。

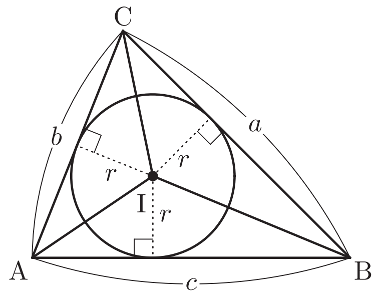
さて、次はもちろん「3 辺が与えられている場合」であるが、証明はともかく公式だけを記しておこう[*41]。$s = \frac{a+b+c}{2}$ とおいて、面積 S は

$$\boxed{\boldsymbol{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\quad \textbf{ヘロンの公式}}$$

[*41] これはヘロン (Heron) の公式と呼ばれる有名な公式である。なぜか教科書には載っていなかったりするのだが、覚えておくと（あんまりないかもしれんが）役に立つことがあるかもしれない。例えば、電車の中で友人と、「やっぱ、ヘロンの公式だよな」「そうだな。3 辺の長さが分かれば、やっぱあれだよな」などと、インテリな会話を楽しむことができるであろう。

で計算できる。ちなみに、ちょっと頑張れば、諸君は証明できるはずである。上で出てきた公式から角度を消去すればいい。そのとき余弦定理が役に立つことだけ指摘しておこう。

この他にも、面積の公式はまだまだ存在する。中でもとりわけ簡単なのは、内接円の半径を用いた公式である。下図のように、三角形に内接する円の中心を I、その半径を r とする。



すると、単純に △ABC=△IAB ＋ △IBC ＋ △ICA で、その分割された三角形は全て高さが r ということから、**内接円の半径と 3 辺が分かっている場合**の面積として、

$$S=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

という何とも単純な式が出てくる。この単純さには、さすがの不良中学生達も腰を抜かすことであろう。もう一つ、**外接円の半径と 3 辺が分かっている場合**の面積は、外接円の半径を R として、

$$S=\frac{abc}{4R}$$

で計算できることを指摘しておこう。証明は諸君に任せた。ついでに、一辺が a の正三角形の面積は

$$S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

となることも、暗記しておくと便利かもしれない。

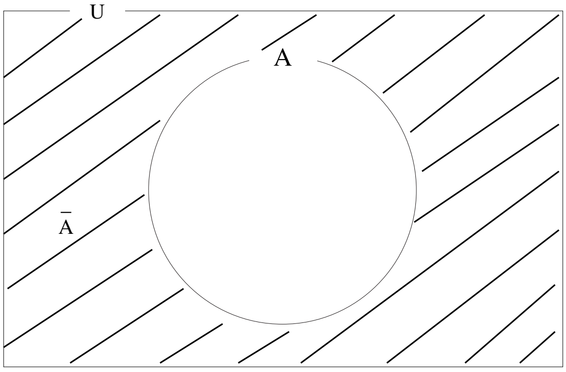
以上のように、三角形の面積は底辺と高さ以外の値からも計算することができる。まずは一番最初の公式を覚えておけばいいであろう。それだけでも、不良中学生にボコボコにされずに済むであろう。不良中学生に対してもっともっと威張りたい人は $S=\frac{abc}{4R}$ を覚えておくといいかもしれない。それはまさに印籠のようなもので、不良中学生達は君の前でひれ伏すに違いない。さぁ、胸を張って町を歩こう。そして、限られた青春時代を存分に楽しもうではないか。

3.11　3 次元でも三角比

若者が吠えている。「別にいいじゃねーかよ！ 何でダメなんだよ！」脱サラ直後のおじさんがそれに応える。「誰に口をきいとるんじゃ！ あかんもんはあかんのじゃ！ うちは弁当屋と違うんじゃ！ だぁっとれ、このクソガキ！」コンビニのバイトと店長の会話である。このコンビニで弁当の移動販売や配達もやってみたらどうかと若者が提案したところ、店長に一蹴されたらしい。しかし、若者はしつこく食い下がる。「立派な弁当屋じゃねーかよー！ 弁当コーナーにぐっと近づいて見てみろよ。弁当しか見えないじゃねえか。それは紛れもなく弁当屋ってことだろ。だったら、弁当屋にできることは俺達にもできるはずだろ！ 何とか言ってみろよ、この借金大魔王！」ここで店長がどのような反応をしたかは次の機会に話そう[*42]。大事なのは、複雑な物も所詮は単純な物の集まりであることを見抜いた若者の洞察力である。お見事である。確かに、コンビニはいろんなものを扱っていて、それ

[*42] これはじっくり考えてみる価値がある。君が店長ならどうするであろうか。ちなみに、借金大魔王は言い過ぎである。

さらに、補集合という概念も知っておく必要があろう。それは読んで字のごとく、補う集合のことである。「日本人」という集合を U とし、「日本男児」という集合を A とする。このとき、U の要素であって A の要素でないものの集合を $\boldsymbol{A}$ の**補集合**といい、上に棒線をつけて $\overline{\boldsymbol{A}}$ と表す（下図参照）。



今の例で言えば、$\overline{A}$ は A でないものの集合、即ち「日本女性」の集合である*8。上につく棒線は、一般的に「〜でない」という意味で使われるので覚えておくと損はしない*9。

4.1.4　集合は青春である

集合は青春である。それは疑いようのない事実である。友人らと一つの集合を作って語り合ったり、恋人と二人だけの集合を作って戯れたり、まるで補集合に追いやられるようなイジメにもめげずに歯を食いしばって頑張ったり、バイト先を転々として様々な集合に属したり、大学生という集合に属するべく受験勉強に励んだり、寿司職人という集合に属するべく努力したり。これが青春でなくて、何だというのか。集合は正に青春の縮図だと言えるであろう。諸君には、ここで学んだ集合と要素の概念、そして数々の記号を生活の様々な場面で応用し、有意義な青春の日々を送って頂きたい。

4.2　ドモルガンの法則

ドモルガン。非常に力強い響きを持った言葉である。まるでモデルガンのようである。噂によると、ドモルガンとは「私の彼って、ほんとドモルガンー！」などというように、力強い男性のことを表すらしいが、その真相は定かではない*10。それほどまでに、ドモルガンの法則は力強いのである。そして、もちろん青春には欠かせないアイテムの一つなのである。

これがドモルガンの法則である。

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}} &= \overline{\boldsymbol{A}}\cap\overline{\boldsymbol{B}} \\ \overline{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}} &= \overline{\boldsymbol{A}}\cup\overline{\boldsymbol{B}} \end{aligned}}$$

眠たくなるかもしれないが、敢えて言葉で表せば、

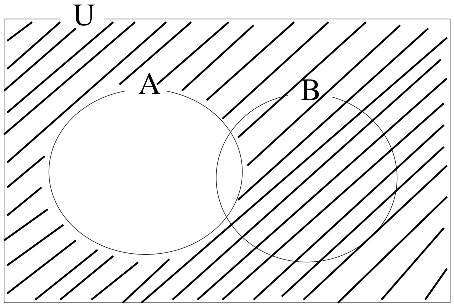
$$\begin{aligned} &A\text{ 又は }B\text{ の補集合} &= \quad &A\text{ の補集合　かつ　}B\text{ の補集合} \\ &A\text{ かつ }B\text{ の補集合} &= \quad &A\text{ の補集合　又は　}B\text{ の補集合} \end{aligned}$$

*8 オカマも含む？

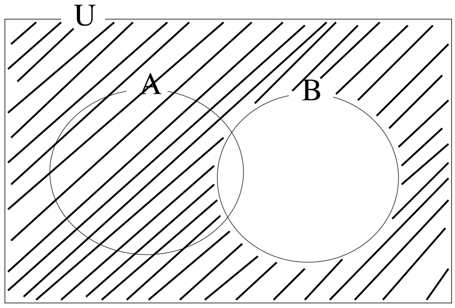
*9 普通、$\overline{A}$ は、（棒線付きという意味で）「A バー」又は「A のバー」などと呼ばれる。そういう意味で言えは、「オカマバー」というのはオカマでない人の集合ということになる。

*10 そんなものは嘘に決まっている。ドモルガンとは、19 世紀のイギリスの数学者 Augustus De Morgan の名字である。しかし、そのような使い方をしてもいいだろう。

となる。ここで、「分からないっす。かなり眠いっす」と言う人もいるかもしれないので、取り敢えず $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ を証明してみよう。証明は至って簡単である。$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は、それぞれ下の左図と右図のように表せる。

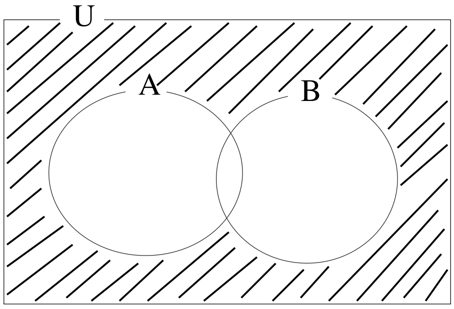


$\overline{A}$



$\overline{B}$

$\overline{A} \cap \overline{B}$ は、これらの共通部分（重なる部分）であるから、下図のようになる。



$\overline{A} \cup \overline{B}$

ここで「これって、まさに $\overline{A \cup B}$ じゃん！ なるほど、だから $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ になるのか。なぁ〜んだ、簡単じゃん！」と言えば、証明終了である[*11]。証明は簡単だが、一体ドモルガンの法則は何の意味があるのか。少し考えてみよう。例えば、相撲取りになる為の条件が「身長 1710cm 以上、かつ体重 750kg 以上」だとしよう[*12]。身長 1710cm 以上の人間の集合を A とし、体重 750kg 以上の人間の集合を B とすると、相撲取りになれるのは $A \cap B$ の集合に属する人たちだけといえる。逆に、相撲取りになれないのは $\overline{A \cap B}$ であり、これはドモルガンの法則により、$\overline{A} \cup \overline{B}$ ということになる。つまり、身長 1710cm 未満又は体重 750kg 未満の人間ということになる。ここで、**「かつ」が「又は」に変化**したことに気づこう。つまり、

身長 1710cm 以上　**かつ**　体重 750kg 以上

の補集合（又は否定）は、

身長 1710cm 未満　**又は**　体重 750kg 未満

となり、単に以上を未満に変えただけでなく、「かつ」が「又は」に変わっていることがわかる。これは重要なポイントである。深く考えずにヘラヘラしていたら、$\overline{A \cap B}$ の A と B に棒線をつけて $\overline{A} \cap \overline{B}$、即ち「身長 1710cm 未満　かつ　体重 750kg 未満」と思ってしまっていたかもしれない。しかし、ドモルガンは力強く「どりゃぁー！」と猛獣のような雄叫びを上げながら「かつ」を「又は」にひっくり返してくれるのである。これはなんとも心強いことである。ここで、もう一度ドモルガンの法則を眺めて、「かつ」と「又は」が入れ替わっていることを確かめ、その偉大さに恐れおののいてみよう。

もう一つ例を挙げよう。脇毛フサフサの人の集合を A として、おしり丸見えの人の集合を B とする[*13]。すると、脇毛がフサフサ又はおしり丸見えの人間の集合は $A \cup B$ で表される。それ以外の集団、即ちその補集合は

[*11] もう一方の式も同じように証明できる。やってみなさい。
[*12] あくまで例えばの話である。
[*13] このような人間の集団はどこに存在するのだろうか。じっくり考えてみよう。

$\overline{A \cup B}$ である。これは、ドモルガンの一撃により、$\overline{A} \cap \overline{B}$ となる。つまり、「脇毛がフサフサでなく、かつおしりも丸見えでない」ということになる。またもや、ドモルガンは「かつ」と「又は」を豪快に取り替えた。お見事である。

証明できるはずだが、結果をひょいと眺めるだけではなぜそうなるのか分かりにくいということが世の中には沢山ある。例えば、車の修理である。壊れた車が修理屋で修理されて元気に走り出す。そのとき、ブレーキも新しいものに交換されていたが、その理由はよくわからなかったりすることもあるだろう。それは正にドモルガンである。つまり、ドモルガン的一撃によって、よくわからないが正しい結果が出たわけである。こんなときには、「なんだかよくわかんないんだけど、車はちゃんと走ってるよ。ほんと、あの修理屋はかなりのドモルガンだね。」などと口走ってみよう。愉快な気分になることうけあいである。また、彼女に誕生日プレゼントを贈ったときに、「なんで人は誕生日にプレゼントを贈るのかしら？」という疑問を彼女に投げかけられたら、君はどうするだろうか。誕生日にプレゼントを贈ることは、誰にとっても当たり前のことであろう。しかし、なぜそんなことをするのかはよく分からない。そんなとき、彼女にこう言ってみよう。「それはね。ドモルガンの仕業なんだよ」そして、彼女にニッコリと微笑みかける。すると彼女は、「あなたってステキ。あなたは私のドモルガンよ」と言って、頬を赤らめることであろう。間違いない。ドモルガンは青春である。

4.3　数え上げの原則

彼女のお父さんは言い続けた。「それくらい、がんばればできるはずだ。がんばれ！とにかくがんばるのだ！」しかし、彼女は頑張れない。どうやって頑張ればいいのか分からないのである。そして、ついに彼女はお父さんに訴えた。「せやかて、どないして頑張ったらええんか分からへんねんもん！」泣きながら訴える娘を目の前に、お父さんは絶句する。ちょっぴりホロ苦い青春のワンシーンである。

彼女が頑張れと言われていたのは、高校卒業後の進路プランである。大学に行くのか、修行に出るのか、結婚するのか、子供は何人生むのか、そして更にその後はどこへ向かうのか。その人生の進路が果たして何通り存在するのか。まずはその数を数え上げることから始めようと、お父さんはアドバイスをしていたのである*14。これは数え上げの問題である。ある事柄について起こりうる全ての場合を数えるとき、その総数を**場合の数**という。そして、場合の数を**もれもなく重複もなく数える**ことを**数え上げ**という。確かに、お父さんが言うように頑張って、なんとか全ての場合を書き上げることができれば数えられるであろう。しかし、書き上げるにしても、うまく書き上げないともれが出たり、重複してしまったりしてうまくいかない。そんな状況で「がんばれ！」と言われても、イライラはつのる一方である*15。ここでは、数え上げの原則、すなわち“ 頑張り方 ”を見ていく。結局のところを最初に言っておくと、確固たる秩序または順序、またはそれらをまとめて方針といってもいい、そのようなしっかりした**拠り所**があった上で数え上げることが大事なのである。ここでは、その拠り所をいくつか学んで頂こう。

(1) 表と自然数的並べ方：大小二つのサイコロを同時に投げるとき、目の和が 7 になる場合の数を求めたい。これは単純な問題なので、すべての場合を書き上げるのに苦労はしないかもしれない。ただ、そのときにどんな方針をもって書き上げているのかを確認することは有意義なことである。恐らく、多くの人が下の表にあるように、大小の目のペアを書き上げることであろう。

大	1	2	3	4	5	6
小	6	5	4	3	2	1

その際の考え方の一つは、**まず大の目を 1 から順番に 6 まで並べ、次に和が 7 になるように小の目を順に書き入れていく**というものである。これは、自然数の順番（$1, 2, 3, \cdots$）を利用していることから、自然数的並べ方と呼べるであろう*16。この方針でいけば、躊躇することなく表を完成させることができ、求める場合の数は 6 通りと

*14 お父さんというのは、（なんじゃかんじゃあったとしても）子供のことを誰よりも考えている存在である。お母さんも同様である。もちろん例外もあるが、それは極めて稀である。

*15 「がんばれ」という言葉は、時にとても残酷な言葉となりうることを知っておこう。

*16 自然数の順番に並べるというのはあまりにも単純なので、そんな名前はどこにも出てこない。が、これも立派な方針の一つである。

第 5 章

確率

5.1 確率とは何か

確率は青春である。それは疑う余地もない。自明である[*1]。しかし、そんな基本的なことさえ知らないまま高校を卒業してしまう人も多い。昨今の悪質な犯罪の実に 7 割が、そのような無知な人間によって引き起こされたとのデータも出ている[*2]。ここでは、諸君が将来そのような " 社会の危険分子 " にならないように、確率と青春について徹底的に議論する。しっかりと理解して頂きたい。

確率には**統計的確率**[*3]と**数学的確率**[*4]の 2 種類がある。例えば、サイコロを投げたときに 1 の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ であることは誰でも納得できると思うが、それが数学的確率である。実験的確率は、サイコロを実際に繰り返し投げることによって得た「1 が出た回数の割合（相対度数）」であり、それは必ずしも $\frac{1}{6}$ とは限らない[*5]。しかし、サイコロを投げる回数をどんどん増やしていけば、実験的確率は数学的確率にどんどん近づいていく[*6]。そのようにして結局のところ同じ値が出てくることになるが、実際に実験をする必要がない分だけ数学的確率の方が便利であろう。サイコロを振る前にもう既に確率がわかってしまうのである。それは驚くべきことである。ちなみに、中学、高校で扱う確率のほとんどはこの数学的確率である。

中学校で学んだように、あることが起きる数学的確率 P は

$$P = \frac{\text{あることが起こる場合の数}}{\text{起こりうる全ての場合の数}}$$

で計算される。もう少し高校生らしく言うと、1 つ試行において事象 A が起こる数学的確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうる全ての場合の数}}$$

で計算される。ここで、試行とはサイコロを投げることのような、結果が偶然に支配され、かつ何回も繰り返し行えるような実験のことを意味し、事象とはその結果として起こる事柄のことを意味する（例：偶数の目が出る）。さらに、「3 の目が出る」のようにそれ以上細かく考えられない事象を根元事象という。これらの用語を使って一層高校生らしく言うと、**事象 A が起こる数学的確率は**

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ に含まれる根元事象の数}}{\text{全ての根元事象の数}}}}$$

とも言える。例えば、一つのサイコロを投げるという試行において、「偶数の目が出る」という事象が起こる確率を求める場合。全ての根元事象は、{1 の目が出る、2 の目が出る、3 の目が出る、4 の目が出る、5 の目が出る、6 の目が出る} の 6 つで、「偶数の目が出る」という事象に含まれる根元事象は {2 の目が出る、4 の目が出る、6 の目が出る} の 3 つであるので、その確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ということになる。

[*1] 証明するまでもなく明らかなことを「自明」という。
[*2] 嘘だ。
[*3] 実験的確率ともいう。
[*4] 先験的確率とか理論的確率ともいう。
[*5] 例えば、サイコロを 3 回投げて 1 が一回も出なかったら、1 が出る実験的確率はゼロである。
[*6] これは大数の法則と呼ばれる。

ここで、上のように定義された数学的確率というのはいつも正しいとは限らないことに気づこう。例えば、ズボンを脱いだときにズボンが裏返しになる確率などは計算不可能でさえある[*7]。数学的確率というものは、非常に特殊なときにだけ計算できるのである。それは、全ての根元事象が**同様に確からしい** (equally likely な) ときだけである。簡単に言えば、一部の根元事象が他に比べて起きやすいというようなことがなく、全てが平等に起きる可能性があるということである。先のズボンの例でいえば、そのまま脱げる場合と裏返しに脱げる場合というのは（ズボンの形やピチピチさ加減などでその起きやすさが劇的に変化するし、一部だけ裏になるという場合もあって裏表という分け方自体も曖昧なので）同様に確からしくないのである。だから数学的確率は正しく計算できないのである。他の例としては、「明日の自分は生きているか死んでいるかの 2 通りなので、明日生きている確率は $\frac{1}{2}$ である。[*8]」や「人間は男か女かオカマかオナベの 4 種類なので、無作為に人間を一人選んだときにその人が男である確率は $\frac{1}{4}$ である。[*9]」といったものがある。一方、サイコロやコインを投げるような単純な試行では、何が出るかという根元事象は同様に確からしいとして考えることができる[*10]。そんなときにだけ、数学的確率は意味を成すのである。これは非常に重要な事実であるので、しっかりと頭に刻んでおこう。

しかしながら、同様に確からしくないと分かっていても、それでも敢えて数学的確率を計算せねばならない時がある。友人が大学受験に失敗したとき、「これはしょうがないよ。だって、受験なんて受かるか受からないかの二つしかないんだぜ。確率でいえば 50 %、ヒフティーヒフティーじゃねーか。お前、ほんと頑張ったよ。カッコイイよ」と言って慰める以外に何ができるだろうか。さらに、オリンピックに出て銀メダルを取ったとき、「今の心境？ 悔しいの一言ですよ。私にとっては銀や銅など何の価値もありません。勝つか負けるか。確率は常に 50 %なのですよ。はっきり言って、金メダル以外はゴミです。英語で言えばゴールド・オア・ナッシングですよ。はっはっは！」と言う以外に何が言えるだろうか。また、彼女に愛を語るときには「僕は君と出会えて嬉しいよ。知ってるかい？ 僕が君と出会う確率はたったの 25 %だったってことを。君と出会うか、前の彼女と再会するか、その前の彼女と再会するか、それ以外の女性と出会うか。君との出会いはこの 4 つのうちの一つ、つまり確率 $\frac{1}{4}$。僕たち、もう結婚するしかないよ！」と突然プロポーズする以外に何ができよう。おまけに、頭が薄くなってきたときには「とうとう来たか。だが、俺は驚きはしない。なぜなら、人間の頭なんてのはロングヘアー・ショートヘアー・ハゲの 3 通りしかないわけだから、ハゲる確率は $\frac{1}{3}$ だ。結局、誰でもハゲる可能性があるってことさ」とクールに語る以外に何ができよう。同様に確からしくなくても、構うことなく突っ走る。これが青春でなくて何だというのだ。数学的確率に真っ向から立ち向かうその姿は、あまりにも美し過ぎる。諸君は今、そんな青春時代のど真ん中にいる。今この瞬間を力の限り美しく生きよう。いつか大人になったとき、「あの頃、もっと同様に確からしくなく生きるべきだった...」と後悔しないように。

5.2　確率の加法定理

近所の食堂で友人とご飯を食べている。君は焼き魚定食、友人はうどん定食だ。君は食べながら、「ご飯と味噌汁は共通。おまけに漬け物も同じときてる。これはまるで 2 の倍数と 3 の倍数のようだ。トランプのスペードの札と 3 以下の札のようでもある。う～ん、興味深いぜ。でも、こいつバカだから言っても分からないだろうなあ」と心の中でつぶやく。同時に友人も、「この 2 つの定食は " 互いに排反 " ではない。これは明らかなことだ。だが、もし俺が定食ではなくうどんだけを注文していたら、俺たちは互いに排反だったんだ...いや、やめとこう。どうせ、こいつの頭では理解できるはずがない。ほんと可哀相な奴だよ」などと考えている。残念な話である。お互いを過小評価するあまり、できるはずの知的な会話ができないでいる。こんな事態におちいらないように、ここでは「確率の加法定理」についてしっかりと学んで頂こう。

1 から 20 までの整数を一つずつ書いた 20 枚のカードがあるとしよう。この中から一枚のカードを引くとき、その数が 2 又は 3 の倍数である確率はいくらだろうか。まず、その引き方は全部で 20 通りあることが簡単にわかる。問題は、2 又は 3 の倍数が出る場合の数である。例えば、君は「こいつバカだから、単純に足してしまうんだ

[*7] 裏・表の 2 種類だから確率 $\frac{1}{2}$ というわけにはいかない。本当にそうなら、かなり面倒な話である。

[*8] 殺し屋に狙われている等の特殊な理由が無い限り、明日生きていることと明日死ぬことが同様に確からしいとは思えない。

[*9] 男と女の数に比べればオカマやオナベの数は非常に少ないと思われるので、オカマやオナベを選ぶことは稀である。つまり、同様に確からしくない。

[*10] サイコロは面によって穴の数が違うので平等ではないとか、コインを投げても表にも裏にもならずに側面で立つこともあるなどと言いたくなる人もいるかもしれない。そんな人は（他人の気分を害さない程度に）どんどん言いましょう。