青春の高校数学 3

方手雅塚 著

中表紙イラスト 「絶対値さん」 by 方手雅塚

青春の高校数学 3
by
方手雅塚

目次

序文

高校数学は間違いなく青春である。それは揺るがざる事実である。未だに疑念が晴れない人は、是非とも本書を読んで頂きたい。第一巻、第二巻と同様、本書は形としては高校数学の参考書であるが、その焦点は常に青春という一点に置かれている。本書を読み進めるうち、あまりの感動に号泣を禁じえないであろう。

何度でも繰り返す。数学は面白いだとか、数学は楽しいだとか、数学は美しいだとか。そんな主観的なことを言ったところで、しょせん響かない者には響かないし、また、響かせる必要もない。しかし、数学が青春であることは誰もが認識すべき非常に重要な事実である。特に現役の高校生諸君の場合は、今この時期に理解しておかないと取り返しのつかないことになる。なぜなら、青春は二度とは戻らないものだからである。本書を通じて、一人でも多くの高校生がその青春を力の限り謳歌することを願う。

方手雅塚
Ann Arbor, May 2007

1.8　無限小数

無限小数は青春である。それは、止まってはならない青春である。世知辛い昨今の青春、挫折もあれば、屈折もあるだろう。凹むこともあれば、くじけそうになることもあるだろう。だが、止まってはならない。青春を止めてはならない。なぜなら、止まらない青春は必ずプリティー*27になることを無限小数が我々に教えてくれるからである。

以下に示すように、有限小数は分数で表すことができる。

$$0.37 = \frac{37}{100}$$

ここで、この 37 が続いていくとどうなるか。

$$0.3737 = \frac{3737}{10000}$$
$$0.373737 = \frac{373737}{1000000}$$
$$0.37373737 = \frac{37373737}{100000000}$$

それはとってもアグリー*28な分数となっていく。では、止まらずにこの 37 を永遠に続けていけばどうなるか。驚くことに、それはプリティーな分数になるのである。同じ数字が小数点以下で無限に続くとき、これを以下のように表すが、

$$0.\dot{3}\dot{7} = 0.3737373737373737373737\cdots$$

このような小数は無限小数と呼ばれ、特に同じ数字が続く場合、これを循環小数という。そして、循環小数は必ず分数で表すことができる。すなわち、循環小数は有理数なのである*29。問題は、それがどの程度プリティーかである。ここで、この循環小数を次のように分解してみると、

$$\begin{aligned} 0.\dot{3}\dot{7} &= 0.37 + 0.0037 + 0.000037 + 0.00000037 + \cdots \\ &= 0.37 \;+\; 0.37 \times 0.01 \;+\; 0.37 \times 0.01^2 \;+\; 0.37 \times 0.01^3 \;+\; \cdots \end{aligned}$$

これは、初項 0.37、公比 0.01 (< 1) の無限等比数列の和であることがわかる。よって、その和は

$$0.\dot{3}\dot{7} = \frac{0.37}{1 - 0.01} = \frac{0.37}{0.99} = \frac{37}{99}$$

となる*30。なんというプリティーな分数だろうか。さっきの、途中で止めた場合の分数と比べてみれば、これがどれほどコンパクトでプリティーな分数かが実感できるだろう。この華麗なるプリティーさは、37 が無限に続くからこそ得られるものなのである。

さらに、よく言われることであるが、$0.\dot{9}$ は 1 なのかどうか。これも、途中で止めれば 1 にはならない（しかもアグリーである）*31が、無限に続けば 1 になる（とってもプリティー！）。先と同様に、$0.\dot{9}$ も

$$\begin{aligned} 0.\dot{9} &= 0.9999999999999999\cdots \\ &= 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots \\ &= 0.9 \;+\; 0.9 \times 0.1 \;+\; 0.9 \times 0.1^2 \;+\; 0.9 \times 0.1^3 \;+\; \cdots \end{aligned}$$

---

*27 Pretty: かわいらしい。こざっぱりした。気持ちがいい。

*28 Ugly: 醜い。不細工な。見苦しい。

*29 有理数は分数で表せる数のことだ。

*30 ところで、このような循環小数を分数にする計算は、

$$\frac{1}{9} = 0.\dot{1} = 0.111\cdots, \quad \frac{1}{99} = 0.\dot{0}\dot{1} = 0.010101\cdots, \quad \frac{1}{999} = 0.\dot{0}0\dot{1} = 0.001001001\cdots$$

などと暗記しておけば、

$$0.\dot{3}\dot{7} = 37 \times 0.\dot{0}\dot{1} = 37 \times \frac{1}{99} = \frac{37}{99}$$

というように、あっさりと計算することもできる。知らなかった？

*31 途中で止めると、$\frac{9}{10}$、$\frac{99}{100}$、$\frac{999}{1000}$ と、どんどんアグリーになっていく。

とかけるので、これは、初項 0.9、公比 0.1 (< 1) の無限等比数列の和である。よって、その和は

$$0.\dot{9} = 0.999999999999999\cdots = \frac{0.9}{1-0.1} = \frac{0.9}{0.9} = 1$$

となる。無限に続けば 1 なのである。そして、それはとってもプリティーである。

もうお分かりだろう。止まってはいけないのである。それはアグリーな青春なのである。少しで止めるならまだいいが、延々と続けてきて突然止めるなどはアグリーの骨頂である。成績が上がらないからといって勉強をやめたり、レギュラーになれないからといって部活をやめたり、痩せないからといってダイエットをやめたりしてはならない。どんなに辛くても、どんなに泣きそうになっても、止めることなく無限に続けるのである。そうすれば必ずプリティーな青春に行き着くのである[*32]。それは、無限小数が教えてくれた青春の約束である。さあ、くじけずに青春を全うしよう。止まることなく走り続けよう。プリティーという名のゴールを目指して。

[*32] 塵も積もればプリティー、石の上にもプリティー。

ここで両辺を微分する。

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}&=\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\\&=\frac{3x^2+2}{x(1+x^2)}\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{3x^2+2}{x(1+x^2)}=x^2\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{3x^2+2}{x(1+x^2)}=\frac{x(3x^2+2)\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

となる。これが **対数関数の微分法** と呼ばれるものである。

$y=f(x)$ の両辺の絶対値の対数をとり、両辺を微分する。

これを使えば、どんな複雑な関数でもバラバラに分断して簡単に微分することができるのである[*46]。

また、そのままではどう微分すればいいのか分からないものも、この方法で微分することができる。例えば、$y=x^x$ 。これは、そのまま眺めていても微分はできない。やはりログで分断する（肩の x を下に引きずり下ろす)。

$$\log y=\log x^x \quad\longrightarrow\quad \log y=x\log x$$

これなら微分ができる。

$$\frac{y'}{y}=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}$$

ゆえに、

$$y'=y(\log x+1)=(\log x+1)x^x$$

となる。

分断の青春、それは対数関数の微分法である。そしてそれは、青春の日常のあらゆる場面で応用される、とてもポピュラーなテクニックである。巨大なポスターを作るのに、それを小さな画用紙に分けて描き、後でそれらを合わせて完成させたり。曲を作るのに、ボーカル、ギター、ドラムなどのそれぞれのパートを別々に録音し、後でそれらを合わせて完成させたり。リーゼント頭の不良グループと仲良くするために、メンバーがそれぞれ一人のときに話しかけて仲良くなっていったり。意識せずとも、人は対数関数の微分法を使っているのである。さあ、始めよう。対数関数の微分法を（意識的に）使って、いろんなことを簡単に実現しよう。そして、青春の日々を効率よく過ごそうじゃないか！

3.14　x^α の導関数（実数 α）

青春の選手権大会、決勝戦。スコアは 0 – 1。残り時間は 2 分。果たして奇跡の逆転優勝なるか。

これまで陰ながらチームの勝利に貢献してきた君だが、残念ながら決勝戦もまたベンチの温め役だ。もう君がフィールドで活躍することはないのだろうか。健気な君は、とにかくチームの優勝だけを願って全身全霊を傾けベンチを温めている。

残り時間 1 分となったところで、コーチが選手を集めてこう言った。「泣いても笑っても、この 1 分で全てが終わる。こうなれば、後で後悔するような戦い方をしてはダメだ。やらずに負けるよりも、やって負けろだ。一か八か、$\sqrt{2}$ を放り込め！」その瞬間、選手達に動揺が走る。「そっ、そんなことできるわけないじゃないですか！」「一体どうすれば、そんなことが出来るというんですか！」「そうですよ、コーチ！」だがコーチは語気を強めて「うるさい、黙れ！ 青春に不可能の文字はないんだ！ さあ、行け！」そう言って、選手達を無理矢理フィールドに押し戻した。

[*46] 微分の後で通分をしたりして結構ややこしいと思うかもしれないが、その程度で済むなら上等である。

そのとき、アツアツのベンチから君が飛び出し、キャプテンを呼んだ。「キャプテン！」「どうした」「ひょっとしたら $\sqrt{2}$ を放り込めるかもしれない」「そうか、お前が言うなら間違いない。よし、お前もフィールドへ出ろ！」「ええっ、いいのかい？」「ああ、いいさ。コーチには俺が後でうまく言っておく。さあ一緒に来い！」「よし！」そうして、君はキャプテンの後についてフィールドに出て行った。初めてのフィールドに感激する君。だが、残り時間はあとわずか。君はさっそく $\sqrt{2}$ の放り込み方を考えた。

「$\sqrt{2}$ は無理数だ。そしてそれは実数に含まれる。だから、α を実数として、$y = x^{\alpha}$ $(x > 0)$ とおくんだ。そしてこの対数をとって、

$$\log y = \log x^{\alpha} \quad \longrightarrow \quad \log y = \alpha \log x$$

そしてこれを微分する。

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

すなわち、

$$y' = \frac{\alpha}{x} y = \frac{\alpha}{x} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

となる[*47]。要するに、

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ は実数})}$$

つまり、これまでの公式にそのまま実数を放り込んでも大丈夫なんだよ。だから無理数だって OK なんだ。そうなんだよ、何も新しい方法を考える必要なんかないんだよ！[*48] この公式はどんな数字でも使えるんだよ！[*49]」

ちょうどそのとき、君の足元にボールが飛び込んできた。キャプテンが君の方を向いて、小さくうなづいた。「よし、決めてやる！」 そう言って、君は雄たけびを上げながら豪快に $\sqrt{2}$ を放り込んだ！

$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}$$

ものすごい勢いで飛び出したボールは二つに割れて一気に場外へ。スコアボードに逆転のスコア 2 – 1 が点灯し、そしてピー、ピー、ピー！ 優勝を決定づける、試合終了のホイッスルが鳴った。優勝だ、優勝したのだ。スタンドは狂ったようなお祭り騒ぎで大フィーバー。レギュラー選手達は、放心状態の君を胴上げしながらフィールドをグルグルと回っている。アツアツのベンチにいるコーチは、涙に濡れた拳で渾身のガッツポーズだ。

胴上げから下ろされた君は、キャプテンのところへ挨拶に行った。「キャプテン、ありがとう」「お前は最高のプレーヤーだ。俺なんて、何度も試合に出てるのに一度もあんなプレーが出来たことはない」「いいや、そんなことはない。俺は、何よりもチームが優勝したことが嬉しいんだ。これは最高の、そして一生の思い出になるだろう」「ああ、そうだな」ガッチリと握手を交わし、目と目で通じ合う二人。次の瞬間、二人の影が一つになった。汗と涙が飛び散る、ある青春のフィールドでの出来事であった。———— 終

3.15　高次導関数

数学の授業中。生徒達が静かに微分の演習に取り組んでいる。すると突然、一人の生徒が先生に質問をした。「先生、おかわりしていいですか？」奇妙な質問に戸惑う先生。「何だ？ どういう意味だ？」「だから、おかわりを . . . いや、つまり、一度微分したものをもう一度微分していいですか？」意味が分かって、先生は笑顔をこぼした。「何だ、そんなことか。もちろんいいぞ。それはなあ、第二次導関数というんだよ。せっかくだから、この機会に説明しておこう」そうして先生の解説が始まった。

[*47] ここまで、α に関しては何の条件も必要としなかった。つまり、この公式はどんな α の値に対しても成り立つのである。
[*48] とにかく、肩の数字を前に下ろして肩の数字を一つ減らせばいいのだ。
[*49] 複素数はどうだろうか？

というように実に簡単に積分できることがわかる。分子が分母の微分の形になっているときは、これを利用するといいだろう。下に少し例を示しておこう。

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+12}\,dx = \log\left|x^2-x+12\right| + C$$
$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C$$

この他にも、$t=\log x$ や、$t=\tan\frac{x}{2}$、$t=\tan x$ といった興味深い置換積分が存在するが、それらは諸君に任せよう[*23]。とにかく多くの特別な置換積分を知っておくことだ。それによって、自分は置換積分を知っていると確信できる。「例えば、こういうのがあるよ」と言って、えびす顔で人に説明することができる。そう、心に余裕が生まれるというわけである。これこそが、特殊なケースを覚えることの効果であり、君が努力する大事な目的なのである。九九を暗記すれば、掛け算をマスターしたと確信できる。ザンニ・ロクヨン・イチニッパー・ニゴロ・ゴイチニを暗記すれば、「俺ってプロっぽいぜ」と悦入りできる。焼き鳥的なものをレシピも見ずに簡単に作り上げてしまえば、「僕って、いいお嫁さんになれるだろうなあ」と夢が膨らむ。そして、もちろんそれらの特殊な知識は様々な場面で応用でき、より一層の余裕を生みだしていくことであろう。間違いない。特殊なケースを覚えておくことは青春だ。さあ、もっともっと特別な場合を考えよう。確信を深め、心の余裕を揺るぎないものにしよう。そして将来、誰もが羨む素晴らしいお嫁さんになってやろうじゃないか！

5.4　部分積分法

「それは無理でしょう」「微分と積分は根本的に違うからね」「っていうか、仮に可能だとしても、君には無理でしょう。はははははは！」「言えてるね。はははは！」また色白の優等生達だ。笑われているのは ——— やはり B 君だ。

B 君は、ある積分の公式を導こうとしていた。微分には、積の微分の公式というのがある。

$$(fg)' = f'g + fg'$$

ならば積分にも同様な積の公式があってもいいだろうと、B 君は考えた。だが、残念ながら以下のような式は成り立たないことがすぐにわかる。

$$\int fg\;dx \neq \left(\int f\;dx\right)g + f\left(\int g\;dx\right)$$

いきなり壁にぶち当たり、B 君は落胆する[*24]。しかし、B 君はあきらめずに考えた。「積分は微分をひっくり返したものだ。だから、微分したら fg になるような関数を見つければいいんだ。

$$(\,?\,)' = fg$$

そしてこれをひっくり返せばいいんだ。

$$\int fg\;dx = \;?$$

よし、この？を見つけてやる！」しかし、それは余りにも難し過ぎた。いつまで経っても微分して fg になるような関数を見つけることが出来ない。しばらくして、色白の優等生達が苦悩する B 君の姿に気づく。そして、いつものように B 君をからかい始めたのである。

と、そこに、その一部始終を見ていた君が割って入った。「おい、また君達かよ。人をバカにするのもいい加減にしろ。B 君はやるさ。必ずその公式を導き出すさ。さあ、B 君、あきらめずに頑張るんだ。 俺が応援するから。

[*23]

- ● $t=\log x$ とおくと、$dx = x\,dt$ となることから、$\frac{f(\log x)}{x}$ の形の積分を簡単にできる。
- ● $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと、$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$、$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$、$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ となることから、$1/\sin x$ などを簡単に積分できる。
- ● $t=\tan x$ とおくと、$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$、$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$、$dx = \frac{dt}{1+t^2}$ となることから、$\cos^2 x$ などを簡単に積分できる。

[*24] 例えば、$f=1$、$g=1$ とすると、左辺は $x+C$ だが、右辺は $2x+C$ となって等式が成り立たない。反例は一つで十分だろう。

とりあえず、できることからやればいいじゃないか。さあ、何かやるんだ！」そんな何の助けにもならない君のアドバイスを受けて、B 君は考えた[25]。そして、とりあえず積の微分の公式をひっくり返してみた。

$$\int (f'g + fg')\,dx = fg$$

そして、これを少しでも目標である積の積分公式に近づけるために、左辺のうちの一つを右辺に持っていった。

$$\boxed{\int \boldsymbol{fg'\ dx = fg\ -\int f'g\,dx}}$$

こうして出たこの式は、なんと教科書にも載っている**部分積分法**と呼ばれる有名な積分公式だった。色白の優等生達は、少し驚いた様子ではあったが、またもや B 君を冷やかし始めた。「まあ、これは簡単な公式だからね」「そうそう、そもそも教科書に載ってるわけだから、これを知らなかったということ自体が恥ずかしいことじゃないでしょうか？ はははははは！」「そうだね。俺なんか、公式というよりも、こんな感じで概念として頭に入っちゃってるよ。

そのまま　微分

$$\int fg'\ dx = f\ g - \int f'\ g\ dx$$

積分　そのまま

だから、例えば、$x\cos x$ の積分なんかは $x(\sin x)'$ とかけるから、これで公式に当てはめて

$$\int x(\sin x)'\ dx = x\sin x - \int (x)'\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

ってな具合にやっちゃうね」「ああ、俺もそうだね」「あら、それって常識じゃなくて？ ははははははは！」

君は悔しかった。自力で有名な公式を導いたことは素晴らしいことだ。なのに、なぜ B 君はバカにされなければならないのか。そしてふと B 君の方を見た。そこには、あきらめずに黙々と積の積分公式を出そうと苦悩する B 君の姿があった。と、そのとき突然、B 君が何かに気づいた。「積分、そのまま？ あっ！ そうか、そうなのか！」そして、

$$F = f, \quad G = g' \ \longrightarrow\ g = \int G\,dx$$

とおいて、部分積分法の公式を以下のように F と G で書き換えた。

$$\boxed{\int \boldsymbol{FG\ dx = F\left(\textstyle\int Gdx\right) - \int F'\left(\textstyle\int Gdx\right)\ dx}}$$

「これが二つの関数の積 FG の積分だ！ 要するに、こういうことだ！」

微分

そのまま

$$\int F\ G\ dx \quad = \quad F\left(\textstyle\int Gdx\right) - \int F'\left(\textstyle\int Gdx\right)\ dx$$

積分

積分

「例えば、$x\cos x$ の積分なら、微分して簡単になるのは x だから、それを [そのまま][微分] の方に選んで、$\cos x$ を [積分][積分] の方とする[26]。そして、一気に

$$\begin{aligned}\int x\cos x\ dx &= x\left(\textstyle\int \cos x dx\right) - \int (x)'\cdot\left(\textstyle\int \cos x dx\right)\ dx \\ &= x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

[25] 確かに具体的には何の助けにもなってないが、「できることからやれ」というのはとっても素晴らしいアドバイスだ。

[26] なるほど、**微分して簡単になる方を微分する方に選ぶと次の積分がやりやすくなる**というわけだな。これは部分積分をする際の重要な一つの指針となるだろう。

とすればいいんだ[*27]。また、積になっていないのも無理矢理に積の形にして、例えば、$\log x$ は $(\log x)\cdot 1$ という積にして、

$$\begin{aligned}\int (\log x)\cdot 1\ dx &= (\log x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

とできる。おおー、やったぞ！ これが積の積分公式なんだ！ ついに見つけたぞ！」色白の優等生達に衝撃が走る。君の胸に感動のビッグウェーブが迫る。B 君は「そのまま・積分・微分・積分！ そのまま・積分・微分・積分！」[*28]と大喜びで踊り狂っている。

しばらくして、色白の優等生達は、「しょせんは同じ部分積分の公式なんだよね。解釈の仕方、というか覚え方がちょっと違うだけなんだよね」「そうそう。何も新しいものはないんだよね」などと言い捨てて去っていった。確かにそうだ。B 君はただ自分流の解釈をしただけだ。だが、その解釈は興味深い。積の微分があるなら積の積分もあると考えて、本当に積の積分の公式を考え出したのだ。結果的には部分積分と同じだが、その解釈はまるで違う。あくまでも二つの関数の積（FG）の積分として見るのである。それは、部分積分法をすでに知っている人間にとっても大いなる刺激となるだろう。君もいろんな解釈を知り、そして時には自分で解釈を考え出し、B 君のように刺激的な青春を送ろうじゃないか。

5.5　いろいろな不定積分（分数関数）

ある日の数学の授業。先生がテキパキと例題をこなしている。「じゃあ、次の問題。

$$\int \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$$

これはこのままでは積分できない。こういう分数関数は、とにかくまず

$$\boxed{\textbf{(分子の次数)} < \textbf{(分母の次数)}}$$

となるまで分子の次数を下げることだ[*29]。この場合は、こうやって

$$\int \frac{x^2+2}{x+1}\,dx = \int \frac{(x^2-1)+3}{x+1}\,dx = \int \left(x-1+\frac{3}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - x + 3\log|x+1| + C$$

はい、終了っと」「ええ？ 一体何がどうなってるんだ？ どうやって分子の次数を下げたんだ？」理解できずに君はうろたえる。だが、誰も先生に質問しないし、中にはウンウンとうなづいている生徒もいる。君は恐くて手を挙げられなかった。先生はひょうひょうと授業を進める。

「はい、次はこれ。

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

えー、分子の次数は分母のそれより低いけど、残念ながらこれもこのままでは積分できない。どうする？」一人の生徒が答えた。「部分分数分解じゃないですか。先生、はっきり言って、これは簡単過ぎます。もう少し高度な問題をやってくれませんか」「オッケー」先生はその要求をあっさりと呑んだ[*30]。「はい、じゃあこうしよう。

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$$

---

*27 もちろん、前ページにある色白の優等生の覚え方を使ってもいいぞ。

*28 どうやら B 君はこの公式を

$$\int FG\ dx = [\text{そのまま}][\text{積分}] - \int [\text{微分}][\text{積分}]\,dx$$

というように見ているようだ。君ならどう見る？

*29 減らせばすぐに積分できるとは限らないが、減らさなければ手も足も出ない。

*30 うーん、本当にあっさりだな。ちなみに、その簡単な積分はこのようにして行なう。まず、

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

とにかく進んでみることだ。ガムシャラに突き進むことである。そうやって初めて、自分の将来が見えてくるのである。それが簡単に見えるときもあれば、なかなか見えないときもあるだろう。例えば、冒頭の行列の場合、その n 乗は以下のようになるが、

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ n(-1)^{n-1} & (-1)^n \end{pmatrix}$$

それに気づくのは簡単ではないかもしれない。だが、それならば、二乗や三乗にとどまらず、四乗、五乗、六乗と、ガンガン計算していけばいい。必ずやどこかで気づくときが来る[*19]。そして、自分の n 乗を知ったとき、即ち自分の将来が見えたときに、その道を邁進するのか、それとも別の道へ進むのかを考えればいい。そんなことは後になって考えることなのだ。わかったフリなどする必要もない。今は、今この瞬間に「コレだ！」と思うことをやればいい。とにかく走り出せ。命さえ残っていれば、後で後悔したって構わないじゃないか。それが青春というものだ。キャリアなどという単語は、青春の辞書には存在しないのである。だから、就職面接では先のことなど語らずに、「将来何がどうなるか、そんなことはさっぱりわかりません。キャリアの意味もよくわかりません。ただ、私は今、貴社で力の限り働きたいと思っているのです。今この瞬間を駆け抜ける青春のフィールドを貴社に見出したのです！ どうか、この私に走らせてください！」と、熱く語ればいい。面接官の涙腺は即座に破壊され、気づいたら抱き合って号泣していることだろう。もちろん就職は即決定だ。さあ、このことをしっかりと頭に叩き込もう。いつか就職面接を受けるときが来たら、反射的に「貴社は私の青春のフィールドなのです！」と叫べるようにしておこう。いくつになっても、その熱い青春を貫こうじゃないか。

7.7 ケーリー・ハミルトンの定理

ケーリー・ハミルトンの定理は青春である。それは、やることをやらずにやってしまう青春である。試験を受けずして試験で満点を取ったり、何も食べずに満腹になったり、彼女と出掛けることなく彼女とデートしたり。また、涙を流さずに号泣したり、怒らずに怒鳴ったり、笑わずに大笑いしたり。さらには、自転車に乗らずにサイクリングをしたり、契約もしていないのにマンションに住んだりもする。果たして本当にそんなことが可能なのだろうか。可能である。ケーリー・ハミルトンの定理が、それを我々に教えてくれる。

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、以下のことが成り立つ。

$$\boxed{\boldsymbol{A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0}}$$

これは、**ケーリー・ハミルトンの定理**と呼ばれる驚くべき定理である[*20]。証明は至って簡単である。

$$\begin{aligned}
A^2 - (a+d)A &= A(A - (a+d)E) \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -ad+bc & 0 \\ 0 & -ad+bc \end{pmatrix} \\
&= -(ad-bc)E
\end{aligned}$$

[*19] 気づくまでやれ！

[*20] 発見者の名前を逆順にして、ハミルトン・ケーリーの定理と呼ばれることもある。事実としては、アイルランド人数学者のハミルトンはこの定理の特別な場合を証明し、イギリス人数学者のケーリーが一般的に証明をしたようである。どちらの名を先に書くか、それにはいろんな解釈があるようだが（アルファベット順？生誕順？）、普通は貢献度の大きい順に並べるものである。ここではとりあえず、最もよく使われている順序で書くことにする。ちなみに、ケーリー・ハミルトンの定理は n 次の正方行列について成立する。それはどんな式か？ 残念ながら、今の時点では、それが n 次式 になるということしか言えない。詳しくは、大学レベルの線形代数学で学んでくれ。

ゆえに、

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$$

という具合だ。

さて、この定理の何に驚くのか。それは、この式を次のように書いてみればわかる。

$$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$$

これは、A^2 を行列の掛け算を行なわずに計算する方法を示しているのである（右辺に行列の掛け算はない！）。掛け算を掛け算せずして計算する。これは驚くべきことである。例えば、$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$ の二乗は、

$$\begin{aligned}A^2&=(1+4)\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}-(1\cdot 4-2\cdot(-1))\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}5&10\\-5&20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&10\\-5&14\end{pmatrix}\end{aligned}$$

というように、わずらわしい行列の積など使わずに、いとも簡単に計算できてしまうのである。これは素晴らしいことである。

ならば、A^3 はどうだろうか。A^3 は AA^2 と書けるので、ケーリー・ハミルトンの定理を使って、

$$A^3=AA^2=A\{(a+d)A-(ad-bc)E\}=(a+d)A^2-(ad-bc)A$$

と書ける。なんと、A^3 は A^2 で計算できる。3 回の掛け算が 2 回で済むのである。同様に、A^4 は A^2A^2 と書けるので、上の結果を使って

$$A^4=AA^3=A\left\{(a+d)A^2-(ad-bc)A\right\}=(a+d)A^3-(ad-bc)A^2$$

と書ける。つまり、4 回の掛け算が 3 回で済むことになる。これより言えることは、**ケーリー・ハミルトンの定理は行列の掛け算を一つ減らすのに役立つ**ということである[*21]。参考書によっては、この定理を CH 定理と書いているものがあるが、それはまさに「(C) 掛け算を (H) 減らす」ということなのである[*22]。これもまた驚くべき事実である。

だが、本当に驚くのはここからである。はっきり言おう。実は、A の何乗であろうと、掛け算など一回もする必要はないのである。最後にここで、A^n を掛け算を使わずに計算する方法を説明しよう。行列、$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$ に対し、A^n を計算してみよう。我々は、ケーリー・ハミルトンの定理から、$A^2-5A+6E=0$ が成り立つことを知っている。これを有効に利用するために、まずは実数で、x^n を x^2-5x+6 で割ることを考えてみる。二次式で割るのだから、その余りは一次式である。これを $ax+b$ とし、商を $Q(x)$ とおくと、以下の式が成り立つ。

$$x^n=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$$

ここで、$x=2$、$x=3$ を代入して[*23]、

$$\begin{aligned}2^n&=2a+b\\3^n&=3a+b\end{aligned}$$

これを解いて a と b を求めると、$a=3^n-2^n$、$b=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$ となる。ゆえに、

$$x^n=(x^2-5x+6)Q(x)+(3^n-2^n)x+(3\cdot 2^n-2\cdot 3^n)$$

さて、この式において、x の代わりに A とおくと、

$$A^n=(A^2-5A+6)Q(A)+(3^n-2^n)A+(3\cdot 2^n-2\cdot 3^n)E$$

[*21] もちろん、まず A^2 を計算して、その後は、$A^3=A^2A$、$A^4=A^3A$ と順々に計算していくのも賢明であろう。

[*22] これは嘘だ。Cayley-Hamilton の頭文字である。

[*23] この等式は恒等式だ。だから、いかなる x についても成立するはずだ。そう、数値代入法によって a と b を求めようというわけだ。

が成り立つ[24]。だが、ケーリー・ハミルトンの定理から、右辺の第一項は消える。すなわち、

$$A^n = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)E$$

「おおー！ 右辺から掛け算が一瞬にして消え去ったじゃないか！ A^n もまた、掛け算をせずに計算できるというのか！」その通りである。これは、このまま計算すれば、

$$A^n = (3^n - 2^n)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} \\ 2^n - 3^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

ということになる。これはもう奇跡である。これこそが、ケーリー・ハミルトンの定理の真髄である[25]。

掛け算をせずに A^n を計算する。そんなことが可能なのか。可能である。ケーリー・ハミルトンの定理が不可能を可能にする。我々は今それを目の当たりにした。君はまだ信じられないのかもしれないが、それは厳然たる事実である。掛け算を掛け算せずに計算するというような一見不可能なことが出来たのである。となれば、試験を受けずに満点を取ったり、食べずに満腹になることが不可能だとどうしていえるだろうか。それもきっとできるはずだ。何をためらうことがある。さあ、今すぐやってみるんだ。彼女と出掛けることなく彼女とデートをし、腕を組まずに腕を組み、明るいのに夜景を見に行き、愛していないのに愛していると言って、唇を重ねずにキッスをするのだ。そうして、奇跡の青春を存分に楽しもうじゃないか！

7.8　逆行列

「何やってんだ、バカヤロー！」突然父さんが怒り出した。君は椅子から転げ落ち、呆然としている。

君は行列の割り算について考えていた。学校で行列の掛け算を学んだのだが、先生は割り算に関しては何も言わなかった。君はそれが気になってしょうがなかった。いろいろ考えながら、例えば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \div \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \div a & b \div b \\ c \div c & d \div d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

などとやってみる。しかしこれはダメだ。実数 a の場合 $a \div a = 1$ となるように、行列の場合も割り算の結果が数字の 1 に相当する単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ になって欲しいからだ[26]。ことごとく割り算に失敗し、君はため息をついていた。そこへ父さんがやってくる。「おう、何やってんだ？ 難しそうなことやってんな、おい」「そうでもないよ。ちょっと行列の割り算について考えてたんだよ」君のそのセリフを聞くや否や、父さんは怒り出したのである。それはそれは凄まじい剣幕だった。

「何やってんだ、バカヤロー！ 高校三年生にもなって割り算なんか考えてどうすんだ。十代だったら、割ることなんかよりも掛けることを考えろ。宅急便にも“割れもの注意”と書いてあるだろう[27]。割るくらいなら、かけごと依存症の方がよっぽどましだ[28]。つまり『a を何で割ったら 1 になるか』じゃなくて、『a に何を掛けたら 1 になるか』を考えるんだ。それはつまり a^{-1}、そう、a の逆数だ！ これなら行列でも考えられるんだ。要するに、『行列 A に何を掛けたら単位行列 E になるか』を考えろってことだ。

いいか。A を正方行列、E を A と同じ型の正方行列とするとき、

$$AX = XA = E$$

---

[24] 右辺には A の掛け算しか存在しない。A は A 自身と交換可能なので、$Q(A)$ がどんな関数であろうと成り立つはずである。

[25] ちなみに、このようなことが出来るのは、行列 A が ケーリー・ハミルトンの定理によって $A^2 - 5A + 6 = O$ を満たすからこそである。一方、実数の場合はケーリー・ハミルトンの定理のようなものがなく、実数 x が $x^2 - 5x + 6 = 0$ を満たす保証は無いので、x^n の計算で掛け算を避けることはできない。そんなときは、せめて掛け算を減らす努力をしよう。例えば、x^5 は $x^5 = (x^2)^2 \times x$ とすれば 3 回の掛け算で済む。また、x^{10} は $x^{10} = ((x^2)^2 \times x)^2$ とすれば 4 回の掛け算で済む。同じようにすれば、x^{10000} などは 20 回の掛け算で済んでしまう。実際、このようなテクニックはコンピューターによる数値計算の分野で利用されている。

[26] 実数 a の場合、$a \div a = 1$ の両辺に a を掛けると、$a = a$ となるが、上の行列の式の場合、両辺に $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を掛けても、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とはならない（右辺が変になる）。つまり、ちゃんとした割り算になっていないのである。

[27] それは違うよ、お父さん。

[28] これまた意味不明だ。